Модель построения равноугольного жесткого фрейма
Ивкин А. Н.

Ивкин Андрей Николаевич / Ivkin Andrey Nikolaevich – аспирант,
кафедра теории вероятностей и математической статистики,
механико-математический факультет,
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара

Аннотация: *в статье рассмотрена актуальная проблема построения конечномерных пространств для восстановления сигналов. Предложен метод построения равноугольного жесткого фрейма, который является системой с полным спарком, так как есть необходимость построения такой модели при восстановлении сигнала.*
Ключевые слова: *фрейм, жесткий фрейм, нормированный фрейм, полный спарк.*

Проблема построения конечномерных пространств и восстановление сигналов появилась в конце XX века. Как следствие появляется теория фреймов, включающая в себя понятие систем с полным спарком. Теория фреймов строится на основе существующей математической теории, особенно используются такие математические объекты как матрица Вандермонда и дискретное преобразование Фурье. Немаловажным представляется изучение и построение моделей полного спарка с целью применения их при восстановлении сигнала.

Семейство векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$в N –мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$ представляет собой фрейм, если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$, такие что для всех $x \in \mathcal{H}_N$,

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 \le B\|x\|^2 \qquad (1)$$

Где A и B являются нижней и верхней границей фрейма, соответственно. Наибольшее значение A и наименьшее значение B, удовлетворяющие неравенству, называются оптимальными границами фрейма [1].

Если $A = B$ возможно, тогда $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ называется жестким фреймом [3]. Если A=B=1 возможно, тогда $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ называется фреймом Парсеваля.

Если $\|\varphi_i\| = 1$ для любого $i \in [M]$ тогда $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ называется нормированным фреймом [2].

Спарком матрицы F называется размер наименьшей линейно зависимой подгруппы столбцов:

$$Spark(F) = \min\{\|x\|_0 : Fx = 0, x \ne 0\}, \qquad (2)$$

Матрицы F размера $M \times N$ является системой с полным спарком если этот спарк настолько велик на сколько возможно т.е.:

$$Spark(F) = M + 1 \qquad (3)$$

Рассмотрим предложенный метод построения систем с полным спарком. Пусть N – простое, выберем любые $M \le N$ строк матрицы дискретного преобразования Фурье $N \times N$, чтобы сформировать гармонический фрейм H, что бы сформировать гармонический фрейм H. Затем выберем любое $k \le M$, и возьмем диагональную матрицу $D: M \times M$, где первые k диоганальных элементов это $\sqrt{\frac{N+k-M}{MN}}$ и где остальные $M - K$ элементов это $\sqrt{\frac{N+k}{MN}}$.

Затем объединение DH с первыми k идентичными базисными элементами производит $M \times (N + K)$ полный спарк нормированного жесткого фрейма [4].

Пример: $N = 3$, $k = 1$, мы можем выбрать $M = 2$ строк дискретного преобразования Фурье матрицы размера $N \times N$. Возьмем нулевую и вторую строку. В этом случае $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$. Конкатенация с первым базисным элементом производит равноугольный жесткий фрейм который является полным спарком:

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{3}} & \sqrt{\dfrac{1}{3}} & \sqrt{\dfrac{1}{3}} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, реализована модель построения систем с полным спарком.

Литература

1. *Balan R.*, *Bodmann B. G.*, *Gasazza P. G.*, *Edidin D*. Fast algorithms for signal reconstruction without phase, Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701(2007) 670111920- 670111932.
2. *Balan R.*. Equivalence relations and distances between Hilbert frames. Proc. Amer. Math. Soc., 127 (8): 2353-2366, 1999.
3. *Balan R., B. G. Bodmann, P. G. Gasazza, D. Edidin* Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients, preprint.
4. *Boris Alexeev, Jameson Cahill and Dustin G. Mixon*. Full spark frames, arXiv: 110.3548v2 [math.FA] 9 Apr. 2012.