СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ

Сафаров И.И.[1], Марасулов А.М.[2], Сарсенов Б.Т.[3]

[1]Сафаров Исмоил Ибрагимович – доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра высшей математики,
Бухарский инженерно-технологический институт, г. Бухара;
[2]Марасулов Абдурахим Мустафаевич – доктор технических наук, доцент,
кафедра компютерных наук;
[3]Сарсенов Бакытбек Темирбекович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель,
кафедра математики,
Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Яссави,
г. Туркестан,
Республика Узбекистан

Аннотация: *в работе дана постановка задачи собственных колебаний тороидальных оболочек, взаимодействующих с жидкостью. Определено гидродинамическое давление в тороидальных координатах. Полученные выражения гидродинамического давления являются функцией Лежандра.*
Ключевые слова: *собственные колебания, тороидальные оболочки, вязкая жидкость, функция Лежандра.*

Одним из основных факторов, определяющих решение динамических задач для трубопроводов с протекающей жидкостью, является гидродинамическое давление жидкости на стенку трубы. При решении этих задач с помощью теории стержней [1; 2] для прямолинейных и криволинейных участков трубопроводов гидродинамическое давление без особых трудностей определяется по известным составляющим вектора скорости жидкости. Для криволинейных участков тонкостенного трубопровода большого диаметра, которые представляют собой один из наиболее сложных по геометрии типов оболочек, тороидальных оболочек, и которые являются наиболее уязвимыми участками трубопровода при эксплуатации, собственные колебания с учётом потока жидкости исследовать не удавалось в связи с трудностями по определению гидродинамическое давление.

Криволинейный участок трубопровода рассматривается в виде тороидальной оболочки с радиусом линии поперечного сечения *r*, внутри которой протекает скоростью $U = const$ идеальная несжимаемая жидкость с плотностью $p_0 = const$. Область, ограниченная тороидальной полостью, заполненная жидкостью, рассматривается в тороидальных координатах α, β, θ где $0 \le \alpha \le r$ - радиальная координата в плоскости поперечного сечения тора (см. рис. 1), $0 \le \beta \le \beta_0$ и $-\pi \le \theta \le \pi$.

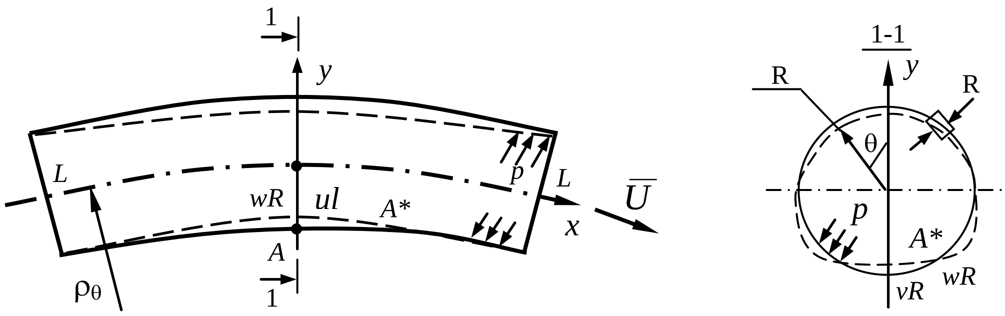

Рис. 1. Участок трубопровода с протекающей жидкостью

Коэффициенты Ламе координатных поверхностных при $\alpha = const$ имеют вид [2]:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{ch\alpha - \cos\beta}, \quad H_\theta = \frac{csh\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}, \qquad (1)$$

где *c* - масштабный множитель. Поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости в процессе колебания оболочки является безвихревым потенциальным полем с потенциалом $\varphi = \varphi(\alpha, \beta, \theta, t)$. Система основных уравнений потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости включает в себя [2]:

- уравнение неразрывности (Лапласа) $\nabla^2\varphi = 0$, (2)

- уравнение движения (Эйлера) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + Q(p) = 0,$ (3)

- уравнение состояния $p_0 = const,$ (4)

где $Q(p)$ - единая в потоке жидкости функция давления, определяемая при $p_0 = const$ равенством

$$Q(p) = \frac{1}{p_0}(p - p_0),$$

где *p* и p_0 - гидродинамическое и гидростатическое давление соответственно. Из (1) – (4) устанавливается связь между гидродинами-ческим давлением *p* и потенциалом возмущённых скоростей φ:

$$p = p_0 - p_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{U}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) \qquad (5)$$

Рассматривая вектор скорости потока жидкости $\overline{U}$ в тороидальных координатах, запишем выражения для его составляющих по α, β, θ:

$$U_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, U_\beta = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, U_\theta = \frac{1}{H_\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \qquad (6)$$

Для составляющей вектора скорости U_α, направленной на нормали к деформированной поверхности оболочки, должно выполняться условие плавного обтекания этой поверхности потоком жидкости [1]:

$$U_\alpha\Big|_{\alpha=r} = \frac{1}{H_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=r} = -r\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{U}{H_\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\bigg|_{a=r}, \qquad (7)$$

где w - отнесённая к радиусу r безразмерная составляющая перемещения точек срединной поверхности оболочки.

Таким образом, задача определения гидродинамического давления жидкости на стенку трубы сводится к нахождению потенциала φ, удовлетворяющего уравнению Лапласа (2) и условиям (5), (7) при $\alpha = r$.

Уравнение Лапласа (2) в тороидальной системе координат α, β и θ имеет вид $[2]$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{ch\alpha - \cos\beta\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{(ch\alpha - \cos\beta)sh\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (8)$$

В результате разделения переменных после подстановки

$$\varphi = (2ch\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}\psi \qquad (9)$$

и представления неизвестной функции $\psi(\alpha, \beta, \theta, t)$ в виде:

$$\psi = A(\alpha)B(\beta)C(\theta)\hat{O}(t) \qquad (10)$$

получим из (8) известное уравнение тора:

$$A''_\alpha + \frac{ch\alpha}{sh\alpha}A'_\alpha - \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{sh^2\alpha}\right]A = 0 \qquad (11)$$

где $\mu = const, n = const$.

Общее решение уравнения тора (11) определяется линейно независимой комбинацией функций тора $P_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right)$ и $Q_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right)$, представляющих собой один из видов функций Лежандра 1-го и 2-го рода:

$$A\left(\alpha\right)=A_1P_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right)+A_2Q_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right) \qquad (12)$$

Учитывая, что в поставленной задаче рассматривается область, ограниченная поверхностью тора координатой α, изменяющейся в пределах $0\leq\alpha\leq r$, и что при $\alpha\rightarrow 0$ функция Лежандра 2-го рода $Q_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)\rightarrow\infty$, в решении (12) следует положить $A_2=0$. Поэтому решение уравнения тора (11) будет выражено только через функцию Лежандра 1-го рода:

$$A\left(\alpha\right)=A_1P_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right) \qquad (13)$$

и решение уравнения Лапласа (2) с учетом (13) будет иметь вид:

$$\varphi\left(\alpha,\beta,\theta,t\right)=\left(2ch\alpha-2\cos\beta\right)^{1/2}P_{n-\frac{1}{2}}\left(ch\alpha\right)A_1\zeta\left(\beta,\theta,t\right) \qquad (14)$$

Произведение $A_1\zeta\left(\beta,\theta,t\right)$ найдём из (8), взяв частную производную $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)$. Подставив затем значение этого произведения в (14), получим выражение для потенциала скоростей:

$$\varphi=-\frac{rH_\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{U}{H_\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)B^{1/2}P_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)}{B^{-1/2}shrP_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)-B^{1/2}P'_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)} \qquad (15)$$

где

$$B=2\left(chr-\cos\beta\right)$$

Гидродинамическое давление протекающей жидкости на стенку оболочки найдём из (15), пренебрегая малыми 2-го порядка, возникающими при вычислении частной функции φ по β:

$$p=p_0-p_0rH_\alpha\hat{O}_n\left[\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{H_\beta}\right)\frac{\partial^2w}{\partial\beta\partial t}U+\frac{U^2}{RH_\beta}\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}\right], \qquad (16)$$

где обозначено

$$\hat{O}_n=-\left(\frac{shr}{B}+\frac{P'_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)}\right)^{-1}$$

В формуле (16) для гидродинамического давления выражение в скобках по аналогии с цилиндрической следует считать приведённым ускорением (с учётом скорости *U*) элемента оболочки, а величину $p_0\hat{O}_n$, зависящую от плотности p_0, рассматривать как присоединённую массу жидкости.

Кроме того, следует учесть, что жидкость протекает в трубопроводе с достаточно малой скоростью *U*, поэтому в формуле (16) можно пренебречь кориолисовым ускорением, характеризуемым смешанной производной, умноженной на скорость *U*. В результате приходим к окончательному выводу формулы для гидродинамического давления жидкости $p_{æ}$, протекающей с постоянной скоростью в криволинейном участке трубопровода $\left(\hat{a}\ \frac{\hat{e}\acute{I}}{\tilde{n}\grave{i}^{\ 2}}\right)$:

$$p = p_0 + p_{æ}\ ,\ p_{æ} = -p_0 r^2 \hat{O}_n^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{U^2}{Rr} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right),\ \hat{O}_n^* = -\left(\frac{1}{2} + \frac{P'_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)} \right)^{-1} \qquad (17)$$

где $P_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)$ и $P'_{n-\frac{1}{2}}\left(chr\right)$ - функция Лежандра первого рода и ее первая производная. Для нахождения параметра $\hat{O}_n^*$ по формуле (17) нет необходимости вычислять функции Лежандра и их производные, так как эта формула содержит отношение производной функции Лежандра к самой функции. Из формул (16) и (17) видно, что значение параметра $\hat{O}_n^*$, определяющего гидродинамическое давление потока жидкости на стенку оболочки, увеличивается по мере увеличения кривизны $\frac{r}{R}$, но в пределах принятого допущения, что $\frac{r}{R} \le \frac{1}{10}$.

Список литературы

1. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. *Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Студия Дизайн ИНФОЛИО, 1996. 189 с.