РЕШЕНИЕ БОЛЬШОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ
Ведерников С.И.

Ведерников Сергей Иванович – пенсионер,
г. Москва

Аннотация: *великая теорема Ферма доказана двадцать лет назад. Как показал С. Сингх [1], от Пифагора до П. Ферма, от П. Ферма до Э. Уайлса знаменитое уравнение развивало математику. Казалось бы, тема закрыта, но многим, не только математикам, не даёт покоя тот факт, что ещё в 1637 году Пьер Ферма заявил, что нашёл «удивительное» решение своей теоремы, несмотря на то, что математические знания того времени были далеки от знаний нашего времени. В предлагаемой работе на базе школьных знаний показана невозможность разложения* X^n и Z^n *на целочисленные множители в уравнении* $X^n+Y^n=Z^n$ *при n > 2. Это значит, что теорема Ферма не имеет целочисленных решений.*
Ключевые слова: *великая, теорема, Ферма, метод деления.*

УДК 512.1

Теорема:

для целого натурального числа $n>2$ уравнение $X^n+Y^n=Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X, Y, Z.

Доказательство.

Имеется $X^n+Y^n=Z^n$, где X, Y, Z, n – натуральные положительные числа.

Z > X >Y – взаимно простые числа, n > 2.

Исходя из того, что уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ является частным случаем уравнения $X^n+Y^n=Z^n$ и в нём выделяются целочисленные значения X, Z и Y, можно утверждать, что если уравнение $X^n+Y^n=Z^n$ при n > 2 не имеет целочисленных множителей для X^n или Z^n, то оно не имеет решений в целых положительных числах.

Рассмотрим порядок выделения множителей числа Y^2 и целочисленных Z, X на примере Пифагоровой тройки (5; 12; 13). [2]

Имеем: $X^2+Y^2=Z^2 \leftrightarrow 5^2+12^2=13^2$.

Преобразуем выражение:

$$Z^2-X^2=Y^2 \leftrightarrow 13^2-5^2=12^2. \qquad (1)$$

Разложим ф. (1) на множители:

$$Z+X=Y_1 \leftrightarrow 13+5=18; \qquad (2)$$

$$Z-X=Y_2 \leftrightarrow 13-5=8. \qquad (3)$$

Сложим почленно ф. (2) и ф. (3):

$$2\cdot Z=Y_1+Y_2 \leftrightarrow 18+8=26;\text{ откуда:}$$

$$Z=\frac{Y_1+Y_2}{2}=\frac{2(9+4)}{2}=13. \qquad (4)$$

Вычтем почленно ф. (3) из ф. (2):

$$2\cdot X=Y_1-Y_2 \leftrightarrow 18-8=10;\text{ откуда:}$$

$$X=\frac{Y_1-Y_2}{2}=\frac{2(9-4)}{2}=5. \qquad (5)$$

Из ф. ф. (2) и (3), а также из ф. ф. (4) и (5) видно, что в случае n = 2 уравнения $X^n+Y^n=Z^n$ возможно выделение целочисленных множителей Y^n и целочисленных значений X *и* Z.

Произведём разложение на множители в уравнении $X^n+Y^n=Z^n$ при $n>2$. Есть три случая. Посыл общий: чётное число, имеющее множителем 2^n, при $n\geq 3$, можно представить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Известно, что Z в исходном уравнении при чётном n не может быть чётным числом, а X и Y одновременно нечётными, поэтому примем Z , X – нечётными числами, Y – чётным числом, поскольку принципиальной разницы между X и Y в данном случае нет.

Рассмотрим первый случай, когда n > 2 чётное число.

Случай 1.

Z, X – нечётные, Y – чётное, n – чётное.

Имеется:

$$X^n+Y^n=Z^n.$$

Преобразуем исходное уравнение:

$$Z^n-X^n=Y^n. \qquad (1)$$

Разложим на множители ф. (1).

$$Z^{\frac{n}{2}}+X^{\frac{n}{2}}=Y^{n-m}; \qquad (2)$$

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = Y^m. \qquad (3)$$

Из почленного сложения ф. (2) и ф. (3) имеем:

$$2 \cdot Z^{\frac{n}{2}} = Y^{n-m} + Y^m;$$

$$Z^{\frac{n}{2}} = \frac{Y^{n-m}+Y^m}{2}; \qquad (4)$$

а из почленного вычитания ф. (3) из ф. (2) имеем:

$$2 \cdot X^{\frac{n}{2}} = Y^{n-m} - Y^m;$$

$$X^n = \frac{Y^{n-m}-Y^m}{2}. \qquad (5)$$

Из ф. ф. (4) и (5) видно, что при соблюдении условия о нечётности Z и X необходимо, чтобы одно из чётных чисел Y^{n-m} *или* Y^m имело множителем только одно число 2. Тогда другое число должно иметь множителем 2^{n-1}, поскольку Y^n – число чётное и имеет множителем минимум одно число 2^n. При этом Y^{n-m} и Y^m не могут иметь общих множителей, кроме оговорённых выше кратных 2, поскольку в противном случае такие множители должны иметь также Z^n *и* X^n, что противоречит условию о взаимной простоте Z, X и Y.

Поэтому Y^{n-m} и Y^m должны состоять из различных множителей числа Y^n в той же степени, в степени n.

Поскольку из ф. (4) и ф. (5) следует, что одно из чисел Y^{n-m} или Y^m должно иметь множителем только одно число 2, а оба должны быть в степени n, то примем ф. (2) и ф. (3) в виде:

$$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_1^n; \qquad (6)$$

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2^{n-1} \cdot Y_2^n; \qquad (7)$$

имея в виду, что Y_1^n – число нечётное.

Из ф. ф. (4) и (5) выразим значение $Z^{\frac{n}{2}}$ *и* $X^{\frac{n}{2}}$, подставив вместо Y^{n-m} значение $2 \cdot Y_1^n$, а вместо Y^m значение $2^{n-1} \cdot Y_2^N$.

$$Z^{\frac{n}{2}} = \frac{2 \cdot Y_1^n + 2^{n-1} \cdot Y_2^n}{2} = \frac{2 \cdot (Y_1^n + 2^{n-2} \cdot Y_2^n)}{2} = Y_1^n + 2^{n-2} \cdot Y_2^n;$$

$$X^{\frac{n}{2}} = \frac{2 \cdot Y_1^n - 2^{n-1} \cdot Y_2^n}{2} = \frac{2 \cdot (Y_1^n - 2^{n-2} \cdot Y_2^n)}{2} = Y_1^n - 2^{n-2} \cdot Y_2^n.$$

Итак, имеем:

$$Z^{\frac{n}{2}} = Y_1^n + 2^{n-2} \cdot Y_2^n; \qquad (8)$$

$$X^{\frac{n}{2}} = Y_1^n - 2^{n-2} \cdot Y_2^n. \qquad (9)$$

Поскольку $X^{\frac{n}{2}}$ является степенью числа *X при чётном* $n \geq 4$, то его можно разложить на множители.

Разложим выражение (9) на множители по формуле для разности n – х степеней.

$$X^{\frac{n}{2}} = (Y_1 - \sqrt[n]{2^{n-2}} \cdot Y_2) \cdot (Y_1^{n-1} + \cdots + 2^{\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{n}} \cdot Y_2^{n-1}). \qquad (10)$$

Из ф. (10) следует, что разложение $X^{\frac{n}{2}}$ на целочисленные множители невозможно.

Допустим:

$$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2^{n-1} \cdot Y_3^n; \qquad (11)$$

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_4^n. \qquad (12)$$

Из почленного сложения и вычитания ф. ф. (11) и (12), аналогичным вышеизложенным имеем:

$$Z^{\frac{n}{2}} = 2^{n-2} \cdot Y_3^n + Y_4^n; \qquad (13)$$

$$X^{\frac{n}{2}} = 2^{n-2} \cdot Y_3^n - Y_4^n. \qquad (14)$$

Разложим ф. (14) на множители.

$$X^{\frac{n}{2}} = \left(2^{\frac{n-2}{n}} \cdot Y_3 - Y_4\right) \cdot \left(2^{\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{n}} \cdot Y_3^{n-1} + \cdots + Y_4^{n-1}\right). \qquad (15)$$

Доказано, что корень k из целого числа является рациональным числом только тогда, когда число под корнем является k – ой степенью другого целого числа, в остальных случаях такой корень есть иррациональное число. Поэтому $\sqrt[n]{2^{n-2}}$ - число иррациональное, поскольку другим, меньшим 2^n, может быть только 1.

Следовательно, $X^{\frac{n}{2}}$ невозможно разложить на целочисленные множители, что однозначно и не допускает другой трактовки, а значит $X^{\frac{n}{2}}$, *и здесь же* X^n являются степенью иррационального числа, уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при чётном n > 2 не имеет решения в целых положительных числах.

При этом особо нужно отметить, что для $\sqrt[n]{2^{n-2}} = 2^{\frac{n-2}{n}}$ при нечётном $\frac{n}{2} = 2k + 1$, характерен следующий ряд показателей:

$\frac{n-2}{n}$ $\frac{0}{2}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{16}{18}$; $\frac{20}{22}$ ..., где первый показатель - $\frac{0}{2}$ соответствует уравнению $X^2+Y^2=Z^2$ при $2^{\frac{0}{2}}=\sqrt{2^0}=\sqrt{1}=1$, что делает возможным его целочисленные решения при невозможности таковых для остального ряда показателей.

Случай 2.

Z; X - нечётные, Y – чётное, n – нечётное.

Имеем:

$$X^n+Y^n=Z^n.$$

Возведём левую и правую часть исходной формулы в квадрат.

$$X^{2n}+2\cdot X^nY^n+Y^{2n}=Z^{2n}.$$

Преобразуем полученную формулу следующим образом:

$$Z^{2n}-X^{2n}=Y^{2n}+2\cdot X^n\cdot Y^n=Y^n\cdot(Y^n+2\cdot X^n). \qquad (1)$$

Разложим ф. (1) на множители.

$$Z^n+X^n=Y^n+2\cdot X^n; \qquad (2)$$
$$Z^n-X^n=Y^n. \qquad (3)$$

Y^n - чётное число, поэтому выразим его как $2^n\cdot Y_1^n$.

Запишем ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$$Z^n+X^n=2\cdot(2^{n-1}\cdot Y_1^n+X^n);$$
$$Z^n-X^n=2^n\cdot Y_1^n.$$

Примем:

$Z^n+X^n=2\cdot(2^{n-1}\cdot Y_1^n+X^n)$ в виде

$Z^n+X^n=2\cdot Y_2^n$, *где* Y_2^n – нечётное число, поскольку целое положительное число можно выразить n – ой степенью другого положительного числа, пусть даже иррационального.

Итак, имеем:

$$Z^n+X^n=2\cdot Y_2^n; \qquad (4)$$
$$Z^n-X^n=2^n\cdot Y_1^n. \qquad (5)$$

Сложим почленно ф. ф. (4) и (5).

Откуда:

$2\cdot Z^n=2\cdot Y_2^n+2^n\cdot Y_1^n$, или

$Z^n=\frac{2\cdot(Y_2^n+2^{n-1}\cdot Y_1^n)}{2}$;

$$Z^n=Y_2^n+2^{n-1}\cdot Y_1^n. \qquad (6)$$

Вычтем почленно из ф. (4) ф. (5).

$$2\cdot X^n=2\cdot Y_2^n-2^n\cdot Y_1^n.$$
$$X^n=\frac{2\cdot(Y_2^n-2^{n-1}\cdot Y_1^n)}{2};$$
$$X^n=Y_2^n-2^{n-1}\cdot Y_1^n. \qquad (7)$$

Из ф. ф. (6) и (7) видно, что Y_2^n *и* Y_1^n не могут иметь общих множителей при сохранении условия о взаимной простоте Z,X,Y; а ф. (6) и ф. (7), а Z^n *и* X^n можно разложить на множители по формулам разложения на множители разности n-x и суммы n-x степеней при нечётном n=2k+1.

Разложим на множители ф. (6) и ф. (7).

$$Z^n=\left(Y_2+\sqrt[n]{2^{n-1}}\cdot Y_1\right)\cdot\left(Y_2^{n-1}-\cdots+2^{\frac{(n-1)^2}{n}}\cdot Y_1^{n-1}\right); \qquad (8)$$
$$X^n=\left(\left(Y_2-\sqrt[n]{2^{n-1}}\cdot Y_1\right)\cdot(Y_2^{n-1}+\cdots+2^{\frac{(n-1)^2}{n}}\cdot Y_1^{n-1}\right). \qquad (9)$$

Как видно из ф. ф. (8) и (9), Z^n *и* X^n нельзя разложить на целочисленные множители, поскольку они являются степенью иррациональных чисел, а значит, уравнение $X^n+Y^n=Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах при нечётном $n\geq 3$.

Случай 3.

$X>Y$ – нечётные, Z – чётное, n – нечётное.

Кроме известного доказательства, что Z в уравнении $X^n+Y^n=Z^n$ не может быть чётным числом при чётном n, заключающемся в неравенстве

суммы квадратов двух нечётных чисел и квадрата чётного числа, возможно ещё одно доказательство этого случая.

Имеется:

$$X^n+Y^n=Z^n. \qquad (1)$$

Вычтем из левой и правой частей уравнения (1) $2\cdot Y^n$.

$X^n-Y^n=Z^n-2\cdot Y^N$; где

$Z^n-2\cdot Y^n=2^n\cdot Z_1^n-2\cdot Y^n=2\cdot(2^{n-1}\cdot Z_1^n-Y^n)$;

с нечётным $(2^{n-1}\cdot Z_1^n-Y^n)=a$.

Тогда:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot a. \qquad (2)$$

Поскольку n чётное по условию, то $X^n - Y^n$ можно разложить, как разность квадратов. Пусть $X^{\frac{n}{2}} + Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot b,$ а $X^{\frac{n}{2}} - Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot c,$ поскольку X и Y нечётные числа.

Тогда:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot b \cdot 2 \cdot c = 4 \cdot b \cdot c. \qquad (3)$$

Сравним ф. (2) и ф. (3).

$2 \cdot a = 4 \cdot b \cdot c;$ *или* $a \neq 2 \cdot b \cdot c,$ т. к. a – нечётное число.

Итак: доказано, что Z *в уравнении* $X^n + Y^n = Z^n$ не может быть чётным числом при чётном $n \geq 4$ и целочисленных решениях уравнения.

Рассмотрим доказательство невозможности чётного Z при нечётном n.

X > Y – нечётные, Z – чётное, n - нечётное.

Преобразуем уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, вычтя из левой и правой его частей $2 \cdot Y^n$.

Имеем:

$$X^n - Y^n = Z^n - 2 \cdot Y^n = 2 \cdot (2^{n-1} \cdot Z_1^n - Y^n). \qquad (4)$$

Отметим, что $2^{n-1} \cdot Z_1^n - Y^n$ - нечётное число.

Примем $2^{n-1} \cdot Z_1^n - Y^n = Z_2^n$.

Тогда ф.(4) примет вид:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot Z_2^n. \qquad (5)$$

Представим уравнение (1) и уравнение (5) в качестве сомножителей разницы квадратов X^n *и* Y^n:

$$(X^n + Y^N) \cdot (X^n - Y^n) = X^{2n} - Y^{2n} = 2 \cdot Z_2^n \cdot Z^n = 2 \cdot (Z_2 \cdot Z)^n.$$

Произведём почленное сложение и вычитание уравнения (1) и уравнения (5), откуда имеем:

$$2 \cdot X^n = Z^n + 2 \cdot Z_2^n;$$

Выразим $Z^n = 2^n \cdot Z_3^n$. Тогда:

$$X^n = \frac{Z^n + 2 \cdot Z_2^n}{2} = \frac{2 \cdot (2^{n-1} \cdot Z_3^n + Z_2^n)}{2} = 2^{n-1} \cdot Z_3^n + Z_2^n; \qquad (6)$$

$$2 \cdot Y^n = Z^n - 2 \cdot Z_2^n;$$

$$Y^n = \frac{Z^n - 2 \cdot Z_2^n}{2} = \frac{2 \cdot (2^{n-1} \cdot Z_3^n - Z_2^n)}{2} = 2^{n-1} \cdot Z_3^n - Z_2^n. \qquad (7)$$

Разложим ф. (6) на множители по формуле разложения на множители суммы нечётных n- х степеней.

$$X^n = 2^{n-1} \cdot Z_3^n + Z_2^n = \left(\sqrt[n]{2^{n-1}} \cdot Z_3 + Z_2\right) \cdot \left(2^{(n-1)^2} \cdot Z_3^{n-1} - \cdots + Z_2^{n-1}\right). \qquad (8)$$

Разложим ф. (7) на множители по формуле размножения на множители разности n–х степеней.

$$Y^n = 2^{n-1} \cdot Z_3^n - Z_2^n = \left(\sqrt[n]{2^{n-1}} \cdot Z_3 - Z_2\right) \cdot \left(2^{\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot Z_3^{n-1} + \cdots + Z_2^{n-1}\right). \qquad (9)$$

Из ф. ф. (8) и (9) следует, что разложение X^n *и* Y^n на целочисленные множители невозможно, а значит Z не может быть чётным числом в уравнении (1).

Общий вывод: для рационального числа $n \geq 3$ уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X, Y, Z.

Список литературы

1. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.:МЦНМО, 2000 г. 286 с.
2. *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959 г. 112 с.
3. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: Учеб. Пособие. М.; Высшая школа, 1984 г. 311 с.